



**Profesores:** Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Gabriel Weintraub  
**Auxiliares:** Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Juan Pablo Troncoso  
**Tiempo:** 3 horas

## I

Un carpintero debe decidir su plan de producción para el próximo semestre, para lo cual debe decidir qué productos producir y en qué cantidad. Sus posibles productos son mesas, sillas, ventanas y puertas. Los insumos que posee son 1000 m<sup>3</sup> de madera y 2000 horas-hombre. En la tabla siguiente se detalla los requerimientos de cada producto:

Producto	Madera (m <sup>3</sup> )	Horas-Hombre
Mesas	4	10
Sillas	2	7
Ventanas	1,5	3
Puertas	3,5	6

Asociado a cada producto vendido existe un beneficio. Además, existe un costo fijo asociado a producir cada uno, debido a la compra de herramientas específicas requeridas para la producción. Ambos, se entregan en la tabla siguiente:

Producto	Beneficio (miles de \$/unidad)	Costo Fijo (miles de \$)
Mesas	40	300
Sillas	20	200
Ventanas	15	50
Puertas	35	450

Adicionalmente, el carpintero ha observado que las sillas sólo se venden junto a las mesas, por lo cual, ha decidido que el número de sillas a producir debe ser igual al doble del número de mesas. Por último, y por un capricho personal, él producirá ventanas o puertas, pero no ambas.

Formulé un modelo de programación lineal entera que entregue el plan óptimo de producción al carpintero.

## II

Sea el siguiente problema:

$$\text{Min } z = 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

s.a.

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 20$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 10$$

$$x_i \geq 0$$

Se sabe que la solución óptima se encuentra en  $x_1=0$ ,  $x_2=40$ ,  $x_3=30$ ,  $x_4=0$ ,  $x_5=0$ .

- Determine el intervalo de valores permitidos para  $c_1$  y  $c_2$  sin que cambie la solución óptima.
- Determine el intervalo de valores permitidos para cada  $b_i$  sin que cambie la base óptima (i.e., sin que cambie el conjunto de variables que son básicas en el óptimo).
- Determine la nueva solución óptima, aplicando Simplex Primal o Dual según corresponda, si  $b_1 = -15$ .

$$\text{Nota: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### III

Una determinada fábrica produce 4 tipos distintos de ladrillos de cemento. El proceso de fabricación está compuesto por 3 etapas: mezclado, vibrado e inspección. Dentro del próximo mes se dispone de 800 horas máquina para mezclado, 1000 horas para vibrado y 340 horas-hombre para inspección.

Para maximizar las utilidades del próximo período se ha planteado el siguiente modelo:

$$\text{Max } z = 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sa: } & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 \leq 800 \\ & 1,5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 1000 \\ & 0,5x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 340 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

En donde  $x_j$  representa la cantidad a fabricar del ladrillo tipo  $j$ . Se agregan las variables de holgura  $x_5$ ,  $x_6$ , y  $x_7$  a la primera, segunda y tercera restricción respectivamente.

Se sabe que la matriz básica en el óptimo está definida como  $B^* = [A_1, A_4, A_3]$ , siendo su inversa:

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estos antecedentes se pide:

- Determine los valores óptimos para todas las variables del problema dual.
- Cual es el máximo valor que usted estará dispuesto a pagar por 1 hora adicional de vibrado. Determine entre que valores de horas disponibles de vibrado tiene validez el valor anterior.

#### IV

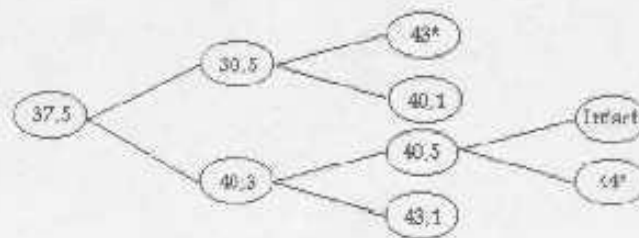
1) Considere un problema lineal estándar en el cual además se exige que la variable  $x_i$  sea múltiplo de  $h_i$  (con  $h_i$  un número natural). Escriba la estructura general de un algoritmo de ramificación y acotamiento que permita resolver este problema.

2) Sea el siguiente problema lineal:

$$(AD) \quad \min \{q^T x / Mx \geq -q, x \geq 0\}$$

con  $M$  una matriz antisimétrica de  $n \times n$  y  $q$  un vector no negativo. Determine el dual de (AD) y demuestre (usando teoremas de dualidad) que  $x=0$  es óptimo para (AD).

3) Considere el siguiente árbol de ramificación y acotamiento asociado a un problema de minimización. El número dentro de cada nodo corresponde al valor óptimo del subproblema respectivo. Aquellos que tienen un asterisco son los subproblemas que tienen solución entera. Con la información provista, determine la mejor cota superior e inferior, y diga cuáles ramas se pueden "cortar".



4) Usando simplex-dual y variables artificiales diseñe un procedimiento que reemplace la Fase I del simplex-primal.

5) Considere un problema lineal estándar con variables enteras. Suponga que el problema es acotado y que la matriz de restricciones  $A$  y el vector del lado derecho  $b$  tienen sólo coeficientes enteros. Demuestre que si la base óptima del problema relajado tiene determinante 1 o  $-1$  entonces su solución es entera (y no es necesario aplicar Branch & Bound). Indicación: recuerde que si  $B$  es invertible, entonces  $B^{-1} = \text{Adj}(B)/\det(B)$ , con  $\text{Adj}(B)$  la matriz de cofactores traspuesta ( $\text{Adj}(B)$  se obtiene realizando sólo multiplicaciones, sumas y restas de los coeficientes de  $B$ ).

**Reclamo Control 3: Viernes 16 de junio de 13:30 a 14:30 en el Hall Sur.**

**Notas y avisos de IN34A se encuentran en la página web del curso:**

**[www.dii.uchile.cl/~in34a](http://www.dii.uchile.cl/~in34a)**

## P2/ Puntos Preguntas de Análisis de Sensibilidad y Post-Optimal

a) i)  $C_1$ ?

$x_1$  es una variable no básica, luego un cambio en  $C_1$  sólo afectará a  $\bar{C}_1$ .

∴ Basta imponer  $\bar{C}_1 \geq 0$

$$\bar{C}_1 = C_1 - \pi \cdot A_{\cdot 1} \geq 0$$

$$C_1 \geq \pi \cdot A_{\cdot 1}$$

$$\pi = C_B B^{-1} = (-1, -2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-3, -4)$$

$$\pi \cdot A_{\cdot 1} = (-3, -4) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = +9 - 8 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 \in [1, \infty^+)}$$

ii)  $C_2$ ?

$x_2$  es una variable básica, luego un cambio en  $C_2$  puede afectar a todos los  $\bar{C}_j$  (no básicos)

$$\bar{C}_j = C_j - \pi \cdot A_{\cdot j}$$

$$\pi = C_B B^{-1} = (C_2, C_3) B^{-1} = (C_2, -2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (C_2 - 2, 2C_2 - 2)$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_1 \geq 0 : \quad \bar{C}_1 &= 3 - (c_2 - 2; 2c_2 - 2) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 - [-3c_2 + 6 + 4c_2 - 4] \\ &= -c_2 + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \leq 1\end{aligned}$$

$\bar{C}_2 = \bar{C}_3 = 0$  por construcción.

$$\bar{C}_4 \geq 0$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (c_2 - 2; 2c_2 - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq 2$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_5 \geq 0 : \quad \bar{C}_5 &= 0 - (c_2 - 2; 2c_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow c_2 \leq 1$  para que la soln. óptima no cambie.  
(Base sigue siendo dual factible)

$$\Leftrightarrow \boxed{c_2 \in (-\infty, 1]}$$

b) Ante un cambio en  $b_i$  la Base seguirá siendo dual factible, luego solamente es necesario verificar la factibilidad primal.

$$i) \quad b_1: B^{-1}b \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + 20 \\ b_1 + 10 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$b_1 \geq -20 \quad \wedge \quad b_1 \geq -10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_1 \geq -10 \Leftrightarrow b_1 \in [-10, \infty^+)}$$

$$ii) \quad b_2: B^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 2b_2 \\ 20 + b_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{aligned} b_2 &\geq -10 \\ b_2 &\geq -20 \end{aligned} \Rightarrow b_2 \geq -10 \Leftrightarrow b_2 \in [-10, \infty^+)$$

c) Si  $b_1 = -15$ , Base seguirá siendo Dual factible, pero no primal factible (Ver parte (b))

Por lo tanto, es posible aplicar el Simplex Dual para obtener la nueva solución óptima a partir de la Base Original.

$$\text{Si } b_1 = -15 \quad X_B' = B^{-1} b' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Var. que sale:  $\min_{x_j \geq 0} \{x_j\} = x_3$  (2ª Variable básica  $\Rightarrow r=2$ )

Var. que entra? Deter  $\bar{A}_r = \beta_r R$   $\beta_r = \text{fila } r \text{ de } B^{-1}$

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{\bar{a}_{rs} \leq 0} \left\{ \frac{\bar{C}_3}{-\bar{a}_{rs}} \right\} = \frac{\bar{C}_3}{-\bar{a}_{rs}}$$

Dado que solo  $\bar{a}_{21}$  es negativo  $\frac{\bar{C}_3}{-\bar{a}_{21}} = \frac{\bar{C}_3}{-\bar{a}_{21}}$

$\therefore x_1$  entra a la Base

$$B'' = [A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 2}] = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B''^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X_B'' = B''^{-1} b' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{Primal Factible}$$

Wega la nueva solución óptima corresponde a  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 0, 0, 0, 0)$   
 (Es Primal y Dual factible).  $\left( \sum (x_i'') = 15 \text{ No es necesario calcular nuevo } z \right)$

P3

# SOLUCION

PARA: Barbara Duran  
DE: P. Loma

- a) De el resultado  $y^*T = C_B^* B^{-1}$  se obtienen los valores para  $y_1^*, y_2^*, y_3^*$ . Ellos son:

$$y_1^* = 5; y_2^* = 2; y_3^* = 0.$$

De las restricciones del dual se obtienen los valores de las variables de holgura

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 1,5y_2 + 0,5y_3 - y_4 & = & 8 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0,6y_3 - y_5 & = & 14 \\ 10y_1 + 4y_2 + y_3 - y_6 & = & 30 \\ 16y_1 + 5y_2 + 2y_3 - y_7 & = & 50 \end{array}$$

$$y_4^* = 0 \quad y_5^* = 0 \quad y_6^* = 28 \quad y_7^* = 40$$

- b) El máximo valor a pagar por 1 litro de motor  $\rightarrow y_2^* = 2$ .

Este valor se mantiene al variar  $b_2$  sin que cambie la base óptima.

$$\begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ b_2 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 - b_2 \\ -1600 + 2b_2 \\ 80 - 0,4b_2 + 340 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 800 - b_2 \geq 0 & \rightarrow & b_2 \leq 800 \\ -1600 + 2b_2 \geq 0 & \rightarrow & b_2 \geq 800 \\ 420 - 0,4b_2 \geq 0 & \rightarrow & b_2 \leq 1050 \end{array}$$

El precio sombra anterior se mantiene para:

$$800 \leq b_2 \leq 900$$



# PAUTA #4

a) El paso inicial sería definir el incumbente  $Z_I = \infty$  (ya estamos minimizando) y crear el primer nodo del árbol de B&B con el problema total: relajado (i.e. levantando la condición de que  $x_i$  sea múltiplo de  $h_i$ ). Luego se entra al siguiente ciclo:

- ① Escoger un nodo (subproblema) a resolver. Si no hay, el proceso termina y  $Z_I$  es el valor óptimo (si  $Z_I = \infty$ , significa que el probl. es infactible).
- ② Resolver el subproblema y aplicar los criterios de corte:
  - i) subprobl. infactible
  - ii) soluc. que satisface  $x_i$  múltiplo de  $h_i \forall i=1, \dots, n$  (en este caso hay que ver si  $Z^*_{\text{subproblema}} < Z_I$  corresponde actualizar el incumbente)
  - iii)  $Z^*_{\text{subproblema}} \geq Z_I$

③ Si el nodo fue cortado ir a ①, de lo contrario escoger algún  $x_i$  que no sea múltiplo de  $h_i$  y ramificar creando dos nuevos nodos (subproblemas). A uno de ellos se le agrega la restricción  $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor_{h_i}$  y al otro  $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil_{h_i}$ .

Con  $\lfloor a \rfloor_b$  = el mayor múltiplo de " $b$ " que sea menor que " $a$ " (p.ej.  $\lfloor 8.3 \rfloor_3 = 6$ )

$\lceil a \rceil_b$  = el menor múltiplo de " $b$ " que sea mayor que " $a$ " (p.ej.  $\lceil 8.3 \rceil_3 = 9$ )

④ Ir a ①

b) El dual de (AD) es el mismo, en efecto:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{(dual AD)} & \max -q^T y & \Leftrightarrow & \max -q^T y & \Leftrightarrow & \min q^T y \\
 \begin{array}{c} \text{s.t.} \\ M^T y \leq q \\ y \geq 0 \end{array} & & \uparrow & \begin{array}{c} -My \leq q \\ y \geq 0 \end{array} & & \begin{array}{c} My \geq -q \\ y \geq 0 \end{array} \\
 & & \text{Matriz} & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{(AD)}} \\
 & & \text{simétrica} & & & 
 \end{array}$$

El pto 0 es primal factible, y por ende tb es dual factible (pq. "dual AD" = AD).

También es directo que el valor de la fun. obj. del primal evaluada en 0 es igual al del probl. dual evaluada en 0. Luego, por corolario del teo. débil de dualidad 0 es óptimo para AD.



c) El probl. es de minimizaci3n, luego la mejor cota superior corresponde a 43 (que es igual a la mejor soluci3n entera encontrada hasta ese momento) y la mejor cota inferior es 40,1. Todas las ramas se pueden cortar excepto aquella del nodo 40,1.

d) Se debe agregar una variable artificial a cada fila. Tomando estas nuevas var. como b3asicas se tiene una base  $B$  que es igual a la identidad y que es trivialmente dual factible (porque todos los coef. de la fun. obj. son positivos). Luego se procede con SIMPLEX-DUAL tratando de sacar (forzosamente) las variables artificiales de la base. Si no es posible sacar todas las var. artificiales de la base, entonces el probl. original es INFACTIBLE.

c) La Matriz  $\text{Adj}(B^*)$  tiene coeficientes enteros (porque se obtiene sumando, restando y multiplicando los coef. de  $B^*$ ). Luego, si  $\det(B^*)$  es 1 o -1 se tiene que  $(B^*)^{-1}$  tiene solo coef. enteros.  
 $\Rightarrow X_0^* = (B^*)^{-1}b$  tiene componentes enteras (p.q.  $b$  to. es un vector entero).

Luego, la soluci3n del probl. relajado tiene soluci3n entera y no es necesario hacer B&B porque el primer nodo del 3rbol cumple uno de los criterios de corte.